OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

a) Rezolvaţi ecuaţia $\frac{x+5}{2[x]+1} = \left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right]$, $x \neq -2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Fie A, B, C şi D din plan pentru care $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ unde $a, b \in \mathbf{R}$, iar suma lor verifică ecuaţia de la a). Arătaţi că punctele A, B, C sunt coliniare.

prof. Aurel Aldea, enunţ modificat

SUBIECTUL II

Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ ale triunghiului ABC intersectează laturile acestuia în $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$.

Arătaţi că triunghiul este echilateral dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

prof. Traian Duţă

SUBIECTUL III

Se consideră numerele $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$, $(\forall)n \geq 2$ natural.
Se cere:

a) să se calculeze x_3 şi x_4;

b) să se demonstreze că $x_n < n - 1$, $(\forall)n \geq 3$;

c) să se demonstreze că $x_n \notin \mathbf{N}$, $(\forall)n \geq 3$;

prof. Romeo Ilie

SUBIECTUL IV

1. Deduceţi $S = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.
2. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$ ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - 2(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \leq 0$.

GM 2/2009, enunţ completat

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.